TEOREMA DE BORSUK-ULAM BIDIMENSIONAL E O TEOREMA DA PANQUECA

Pablo Marcelo Arboleya Nogueira
Universidade Estadual de Londrina
pablo.arboleya@uel.br

Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho
Universidade Estadual de Londrina
liboni@uel.br

Resumo:

Este trabalho insere-se na área de Topologia Algébrica, que utiliza ferramentas de álgebra para estudar problemas topológicos. O objetivo é apresentar o Teorema de Borsuk-Ulam para o caso bidimensional, que afirma que para toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, existe um par de pontos antipodais x e $-x$ em $\mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$. A demonstração é construída a partir de resultados preliminares, como a não existência de uma aplicação contínua que preserve antípodas de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{S}^1$. Também apresentamos a principal aplicação, o Teorema da Panqueca, o qual garante que dadas duas regiões Lebesgue-mensuráveis de medida finita no plano, existe uma reta que as bissecta simultaneamente.

Palavras-chave: Topologia algébrica; Borsuk-Ulam; Panqueca.

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar o Teorema de Borsuk-Ulam para o caso bidimensional e, em seguida, usar esse resultado para provar o Teorema da Panqueca. Ambos são exemplos clássicos de Topologia Algébrica, onde aplicamos ferramentas de álgebra para resolver problemas de topologia/geometria.

O Teorema de Borsuk-Ulam afirma que, para qualquer função contínua que leva da superfície de uma esfera para um plano ($f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$), sempre vai existir um par de pontos opostos na esfera que acabam no mesmo ponto do plano, que a princípio é algo bem abstrato, mas tem uma aplicação bem concreta: o Teorema da Panqueca. Esse segundo teorema garante que, se tivermos duas áreas finitas no plano, como duas panquecas, existe uma reta que consegue cortar as duas exatamente ao meio, dividindo-as em áreas iguais.

O caminho que vamos seguir aqui é primeiro demonstrar alguns resultados que auxiliarão a demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam, e em seguida, utilizando o Teorema de Borsuk-Ulam, demonstrar o Teorema da Panqueca.

2. Resultados preliminares

Recordamos aqui algumas definições e resultados de topologia geral e algébrica que foram abordados em um trabalho anterior (Arboleya et al., 2024), as devidas demonstrações e desenvolvimentos podem ser encontrados nesse mesmo trabalho e também na referência (Munkres, 2000). Os conteúdos aqui apresentados serão essenciais para o desenvolvimento que se segue.

Definição 2.1. Sejam X um espaço topológico e $x, y \in X$. O conjunto de todos os caminhos com ponto inicial x e ponto final y será denotado por $\mathscr{P}(X; x, y)$. O conjunto de todos os laços em x será denotado por $\mathscr{L}(X; x) = \mathscr{P}(X; x, x)$.

Definição 2.2. Sejam X, Y espaços topológicos e aplicações contínuas $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$. Dizemos que f_0 é *homotópica* a f_1 se existir uma aplicação contínua

$$F : X \times I \longrightarrow Y;$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$; $\forall x \in X$. A aplicação F é denominada *homotopia* entre f_0 e f_1. Se f_0 é homotópica a f_1, escreveremos $f_0 \simeq f_1$. Se $f_0 \simeq f_1$ e f_1 é uma aplicação constante, dizemos que f_0 é *nulo-homotópica*.

Definição 2.3. Seja X um espaço topológico, pontos $x_0, x_1 \in X$ e caminhos f_0, f_1 em $\mathscr{P}(X; x_0, x_1)$. Dizemos que f_0 e f_1 são *homotópicos por caminho* se existir uma aplicação contínua $F : I^2 \longrightarrow X$ tal que

(1) $F(s, 0) = f_0(s)$ e $F(s, 1) = f_1(s)$;

(2) $F(0, t) = x_0$ e $F(1, t) = x_1$;

para todo $s, t \in I$, chamaremos F de *homotopia por caminhos* entre f_0 e f_1. Denotaremos $f_0 \simeq_p f_1$.

Definição 2.4. Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$. O conjunto quociente $\mathscr{L}(X; x_0)/\simeq_{\mathrm{p}}$ dos laços de $\mathscr{L}(X; x_0)$ pela classe de equivalência $\simeq_{\mathrm{p}}$ quando munido da operação de produto de classes $* : [\mathscr{L}(X; x_0)]^2 \longrightarrow \mathscr{L}(X; x_0)$ é um grupo. Chamamos este grupo de *grupo fundamental de X baseado em x_0*, ou mais geralmente, de *primeiro grupo de homotopia de X baseado em x_0* e usamos a notação $\pi_1(X, x_0)$.

Definição 2.5. Sejam X, Y espaços topológicos, pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ e uma aplicação contínua $h\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Defina $h_\star\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ da seguinte forma, $h_\star([f]) := [h \circ f]$. $h_\star([f])$ é chamado de *homomorfismo induzido* por h, relativo ao ponto base x_0.

Teorema 2.6. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Teorema 2.7. Se $n \geq 2$, então $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$.

Lema 2.8. Seja $h : \mathbb{S}^1 \to X$ contínua. São equivalentes:

(1) h é nulo-homotópica;

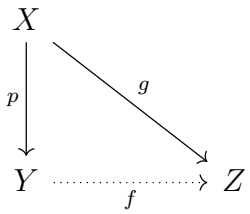
(2) h estende para uma aplicação contínua $k : B^2 \to X$;

(3) $h_\star$ é o homomorfismo trivial.

Definição 2.9. Sejam X e Y espaços topológicos e seja $p : X \to Y$ uma aplicação sobrejetora. A aplicação p é chamada de uma *aplicação quociente* se um subconjunto $U \subseteq Y$ é aberto em Y se, e somente se, sua pré-imagem $p^{-1}(U)$ é aberta em X.

Observação 2.10. Segue imediatamente da definição que se $p : X \to Y$ é uma aplicação contínua, sobrejetora e aberta (ou fechada), então p é uma aplicação quociente.

Teorema 2.11. Seja $p : X \to Y$ Uma aplicação quociente. Sejam Z um espaço e $g : X \to Z$ uma aplicação que é constante em cada $p^{-1}(\{y\})$, para $y \in Y$. Então g induz uma aplicação $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. A aplicação induzida f é contínua se, e somente se, g é contínua; f é aplicação quociente se, e somente se, g é aplicação quociente.



Teorema 2.12. Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento, e para um ponto $b_0 \in B$ colocamos $e_0 = p(b_0)$. Se dois caminhos $f, g : I \longrightarrow B$ começando em b_0 e terminando em b_1 são homotópicos por caminhos, então os levantamentos para caminhos $\tilde{f}, \tilde{g} : I \longrightarrow E$ começando em e_0 terminam no mesmo ponto e são também homotópicos por caminhos.

3. Desenvolvimento

Lema 3.1. A aplicação $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $q(z) = z^2$ com $z \in \mathbb{C}$ é aplicação quociente.

Demonstração.

- $q(z) = z^2$ é contínua pois é polinômio;

- q é sobrejetora, pois seja $w \in \mathbb{S}^1$ (contradomínio),$|w| = 1$, $w = e^{i\theta}$ e existe $z \in \mathbb{S}^1$, $z = e^{\frac{i\theta}{2}}$ e $\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2 = e^{i\theta} = w$.
- q é fechada pois seja $F \subset \mathbb{S}^1$ fechado, como $\mathbb{S}^1$ é compacto, F é compacto e como q é contínua, $q(F)$ é compacto em $\mathbb{S}^1$ e portanto fechado.

□

Lema 3.2. A aplicação $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $q(z) = z^2$ com $z \in \mathbb{C}$ é aplicação de recobrimento.

Demonstração. Já vimos acima que q é contínua e sobrejetora, resta mostrar que todo ponto do contradomínio possui uma vizinhança que é uniformemente coberta por q.

Com efeito, seja $w \in \mathbb{S}^1$ e $U \ni w$ vizinhança de w, sendo $U = \mathbb{S}^1 - \{1\}$ (esse U existe para todo $w \in \mathbb{S}^1$, basta rotacionar).

Queremos mostrar que $q^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, com $V_1, V_2 \subset \mathbb{S}^1$ abertos disjuntos e $q|_{V_i} : V_i \to U$ é homeomorfismo para $i = 1, 2$.

Note que $U = \mathbb{S}^1 - \{1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in (0, 2\pi)\}$, e assim,

$$q^{-1}(U) = \{z \in \mathbb{S}^1 : z^2 \in U\} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 : e^{2i\theta} \in U\}.$$

Ou seja,

$$e^{i2\theta} \in U \iff 2\theta \in (0, 2\pi) \mod 2\pi \iff \theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi),$$

pois se $\theta \in (0, \pi)$ então $2\theta \in (0, 2\pi)$, se $\theta \in (\pi, 2\pi)$ então $2\theta \in (2\pi, 4\pi) \equiv (0, 2\pi)$ e se $\theta = \pi$ então $2\theta = 2\pi$ e $e^{2\pi i} = 1 \notin U$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} q^{-1}(U) &= \{e^{i\theta} : \theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)\}; \\ &= V_1 \cup V_2. \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} V_1 &= \{e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 : \theta \in (0, \pi)\}; \\ V_2 &= \{e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 : \theta \in (\pi, 2\pi)\}. \end{aligned}$$

V_1 e V_2 são abertos em $\mathbb{S}^1$, disjuntos, e as imagens sob q cobrem exatamente U. Nos resta verificar que $q|_{V_i} : V_i \to U$ é homeomorfismo.

- $q|_{V_1}$ é injetora Seja $z_1 = e^{\theta_1}$, $z_2 = e^{i\theta_2} \in V_1$, com $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$. Suponha $q(z_1) = q(z_2)$, ou seja,

$$e^{i2\theta_1} = e^{i2\theta_2} \implies \theta_1 = \theta_2 \mod \pi.$$

  Mas como $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$, temos que $\theta_1 = \theta_2$ e portanto, $z_1 = z_2$.

- $q|_{V_1}$ é sobrejetora. Seja $w \in U$, $w = e^{i\theta}$ com $\theta \in (0, 2\pi)$, então, $\frac{\theta}{2} \in (0, \pi)$, ou seja, existe $z \in V_1$, $z = e^{\frac{i\theta}{2}}$ tal que $q(z) = w$.

- $q|_{V_1}$ é contínua pois é restrição de q que é contínua.

- A inversa de $q|_{V_1}$ é $(q|_{V_1})^{-1} : U \to V_1$ definida por $(q|_{V_1})^{-1}(e^{i\theta}) = e^{\frac{i\theta}{2}}$, e está bem definida pois $\theta \in (0, 2\pi) \implies \frac{\theta}{2} \in (0, \pi)$ é contínua.

  O argumento para $q|_{V_2}$ é completamente análogo e podemos concluir então que $q|_{V_i}$ é homeomorfismo para $i = 1, 2$ e portanto, q é aplicação de recobrimento.

□

Definição 3.3. Seja $x \in \mathbb{S}^n$, a *antípoda* de x é o ponto $-x$. Uma aplicação $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ é dita *preservar antípodas* se $h(-x) = -h(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$.

Note que função preservadora de antípodas é justamente função ímpar.

Teorema 3.4. Se $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é contínua e preservadora de antípodas, então h é nulo-homotópica.

Demonstração. Sejam $b_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$ e $\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a rotação de $\mathbb{S}^1$ que leva $h(b_0)$ em b_0. Como ρ é uma rotação, ρ também preserva antípodas, e portanto, $\rho \circ h$ também.

Se H é homotopia entre h e uma aplicação constante, então $\rho \circ H$ é uma homotopia entre $\rho \circ h$ e uma aplicação constante. Então, é suficiente provar o teorema utilizando a hipótese adicional de que $h(b_0) = b_0$, pois caso não for, basta considerar $\rho \circ h$.

Passo 1. Seja $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $q(z) = z^2$ com $z \in \mathbb{C}$. Por (3.1) sabemos que q é aplicação quociente.

Agora, note que a imagem inversa de q em qualquer ponto de $\mathbb{S}^1$ consiste de dois pontos antipodais z e $-z$.

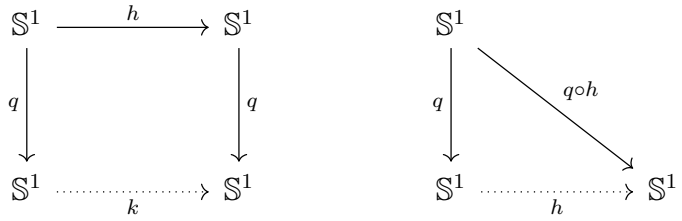
Com efeito, seja $w = (\cos(\phi), \sin(\phi)) \in \mathbb{S}^1$. Queremos encontrar todos os pontos $z = (\cos(\theta), \sin(\theta) \in \mathbb{S}^1$ tal que $q(z) = w$, ou seja,

$$\begin{aligned}
&(\cos(2\theta), \sin(2\theta)) = (\cos(\phi), \sin(\phi));\\
&\implies 2\theta = \phi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};\\
&\implies \theta = \frac{\phi}{2} + k\pi.
\end{aligned}$$

E perceba que $(\cos(\frac{\phi}{2} + pi), \sin(\frac{\phi}{2} + pi)) = (-\cos(\frac{\phi}{2}), -\sin(\frac{\phi}{2}))$ Assim, para qualquer ponto em $\mathbb{S}^1$, a imagem inversa de q resulta em dois pontos, $z_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $z_2 = -(\cos(\theta), -\sin(\theta))$. Como $h(-z) = h(z)$ por hipótese, temos que

$$q(h(-z) = q(-h(z)) = (-h(z))^2 = (h(z))^2 = q(h(z)).$$

Então, como para cada ponto $s \in \mathbb{S}^1$ temos que $q^{-1}(\{s\}) = \{z, -z\}$, concluímos que $q \circ h$ é constante em $q^{-1}(\{s\})$ e podemos então aplicar o teorema (2.11), em que $q \circ h$ induz uma aplicação contínua $k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $k \circ q = q \circ h$.



Note que

$$\begin{aligned}
&q(b_0) = h(b_0) = b_0;\\
&k(b_0) = k(q(b_0)) = q(h(b_0)) = q(b_0) = b_0.
\end{aligned}$$

E também $h(-b_0) = -b_0$ pois h preserva antípodas.

Passo 2. Mostraremos que $k_\star : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ é não trivial.

Sabemos que $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $q(z) = z^2$ é aplicação de recobrimento, como visto em (3.2). Agora, seja $\tilde{f}$ um caminho em $\mathbb{S}^1$ de b_0 até $-b_0$, esse caminho consiste de pontos em $\mathbb{S}^1$ com argumentos variando sobre um intervalo de tamanho π. Então, $f := q \circ \tilde{f}$ é um caminho com argumentos variando sobre um intervalo de tamanho 2π, ou seja, um laço em b_0 ($f(0) = q(\tilde{f}(0)) = q(b_0) = b_0$ e $f(1) = q(\tilde{f}(1)) = q(-b_0) = b_0$).

Assim, $\tilde{f}$ é um levantamento de f em $\mathbb{S}^1$ que começa em b_0 mas não termina em

b_0 e portanto f não é nulo-homotópica, pois caso fosse, existiria homotopia H entre f e b_0 implicando pelo Teorema (2.12) que existe homotopia $\tilde{H}$ entre $\tilde{f}$ e b_0, um absurdo, pois $\tilde{f}$ não termina em b_0. Logo, $[f]$ não é trivial em $\pi_1(\mathbb{S}, b_0)$.

Veremos agora que $k_\star$ não é trivial,

$$\begin{aligned} k_\star([f]) = [k \circ f] = [k \circ (q \circ \tilde{f})] &= [(k \circ q) \circ \tilde{f}] \\ &= [(q \circ h) \circ \tilde{f}] \\ &= [q \circ (h \circ \tilde{f})]. \end{aligned}$$

Como h preserva antípodas por hipótese, $h \circ \tilde{f}$ é um caminho de b_0 até $-b_0$. Então, pelo mesmo argumento anterior, porém agora para $h \circ \tilde{f}$, concluímos que $[q \circ (h \circ \tilde{f})]$ não é trivial e portanto, $k_\star : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ é um homomorfismo não trivial.

Passo 3. Mostraremos que $h_\star$ não é trivial, e portanto, h não é nulo-homotópico.

Note que $k_\star$ é injetor pois é um homomorfismo não trivial entre grupos cíclicos infinitos (todo grupo cíclico infinito é isomorfo a $\mathbb{Z}$, qualquer homomorfismo em $\mathbb{Z}$ é da forma kn que é injetor se $k \neq 0$ que é justamente nosso caso).

Temos também que $q_\star$ é injetor pois "multiplica por 2".

Logo, $k_\star \circ q_\star$ é injetor e $k_\star \circ q_\star = q_\star \circ h_\star$ e assim, $h_\star$ é injetor e portanto é não trivial e pelo Lema (2.8) ($\neg(3) \implies \neg(1)$) h não é nulo-homotópico. □

Teorema 3.5. Não existe aplicação preservadora de antípodas $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$.

Demonstração. Suponha $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ contínua e preservadora de antípodas. Interprete $\mathbb{S}^1$ como o "equador" de $\mathbb{S}^2$, então, $h := g|_{\mathbb{S}^1}$ é contínua e preservadora de antípodas de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^1$ e pelo teorema anterior, h não é nulo-homotópica, porém, o "hemisfério norte" de $\mathbb{S}^2$ é homeomorfo a B^2, portanto, g é uma extensão contínua de h para B^2 e pelo Lema (2.8), h é nulo-homotópica, um absurdo. Logo g não existe.

□

Teorema 3.6. [Borsuk-Ulam em $\mathbb{S}^2$]. Dado uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, existe um ponto $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$(preserva antípodas).

Demonstração. Suponha que $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^2$, então,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

é contínua, $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ pois $\|g(x)\| = 1$ e g preserva antípodas, pois

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} \\ &= (-1)\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Um absurdo pois contradiz o teorema anterior. □

Uma aplicação interessante é a seguinte: se considerarmos uma camada atmosférica a uma altitude fixa como uma esfera bidimensional ($\mathbb{S}^2$), e assumirmos que a temperatura e a pressão são funções contínuas que podem ser medidas em cada ponto dessa esfera, podemos concluir que ao mapear cada ponto x da esfera ao par de valores (Temperatura, Pressão), criamos uma função contínua

$$\begin{array}{rccl} F : \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & F(x) = (\text{Temperatura}(x), \text{Pressão}(x)). \end{array}$$

O teorema garante que existe um ponto x_0 para o qual $F(x_0) = F(-x_0)$, isto é, este ponto e sua antípoda possuem, no mesmo instante, valores idênticos de temperatura e pressão.

Teorema 3.7 (Panqueca). Dadas duas regiões Lebesgue-mensuráveis limitadas em $\mathbb{R}^2$, existe uma reta que bissecta ambas.

Demonstração. Considere duas regiões Lebesgue-mensuráveis $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$, veremos $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times 1 \subset \mathbb{R}^3$. Veremos que existe uma reta L que bissecta A_1 e A_2.

Seja $u \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, considere o plano P em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e possui u como vetor normal, esse plano divide $\mathbb{R}^3$ em dois semi-espaços.

Observe que uma reta em $\mathbb{R}^2$ é determinada por uma equação $ax + by + c = 0$ em que $a^2 + b^2 \neq 0$. Ainda, podemos assumir que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ pois se não, poderíamos dividir estas constantes por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Assim, podemos associar uma reta do plano a um vetor $u \in S^2$.

Observe também que essa associação pode ser interpretada geometricamente: se identificarmos $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ como o plano $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$, a reta $ax + by + c = 0$ associada ao vetor $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{S}^2$ é a reta obtida pela interseção entre o plano P_u que passa pela origem e é normal ao vetor u e a nossa representação de $\mathbb{R}^2$. Pois veja que a equação que define P_u é $ax + by + cz = 0$ enquanto a que define $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ é $z = 1$; para que (x, y, z) satisfaça ambas as equações, é necessário e suficiente que $ax + by + c = 0$. Para $i = 1, 2$, seja $f_i(u)$

a área de A_i que está contida no mesmo semi-espaço de u mas se $u = k = (0, 0, 1)$ ou $u = -k = (0, 0, -1)$ então o plano P não intersecta $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$, nestes casos, definimos $f_i(k) = \text{area}(A_i)$ e $f_i(-k) = 0$. Ou seja,

$$\begin{array}{rcl} f_i : \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ u & \mapsto & \begin{cases} \text{área de } A_i, & \text{se } u = k \\ 0, & \text{se } u = -k \\ \text{área de } A_i \text{ contida no mesmo semiplano de } u, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Trocando u por $-u$ nos dá o mesmo plano P, porém o outro semi-espaço, então $f_i(-u)$ é a área de A_i que está do outro lado de P em relação a u.

Segue então que

$$f_i(u) + f_i(-u) = \text{area}(A_i). \tag{1}$$

Agora, considere $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$, a princípio assumimos que F é contínua

Pelo teorema de Bosurk-Ulam (3.6), existe $u_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $F(u_0) = F(-u_0)$, ou seja,

$$f_i(u_0) = f_i(-u_0), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Portanto,

$$f_i(u_0) + f_i(-u_0) = f_i(u_0) + f_i(u_0) = 2f_i(u_0),$$

mas, por (1), temos

$$\begin{aligned} 2f_i(u_0) &= \text{area}(A_i) \\ \implies f_i(u_0) &= \frac{\text{area}(A_i)}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja, o vetor u_0 nos dá um plano P_0 que bissecta $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ ao longo da reta L_0 que divide a área de A_1 e A_2 em duas partes iguais, como queríamos.

□

O teorema acima é um caso particular do seguinte teorema, que pode ser encon-

trado em (Rotman, 1988). A demonstração utiliza ferramentas mais sofisticadas do que as que possuímos.

Teorema 3.8 (Teorema do Sanduíche de Presunto). Sejam $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ limitados e Lebesgue-mensuráveis. Então, existe um hiperplano que bissecciona cada A_j, para $j = 1, \ldots, n$ (i.e., metade da medida de cada A_j fica em cada lado do hiperplano).

Observações.

1. O nome vem do caso $n = 3$: dado um pedaço de pão branco, um pedaço de pão de centeio e um pedaço de presunto, é possível fatiar o sanduíche com um único corte em dois sanduíches, cada um contendo as mesmas quantidades de pão branco, pão de centeio e presunto.

2. O exemplo alimentar acima é enganoso, pois os subconjuntos A_j podem se intersectar.

O Teorema da Panqueca (3.7) possui esse nome por conta do teorema acima para o caso $n = 2$. Dadas duas panquecas, é possível fatiá-las com um único corte, de modo que ambas são divididas em partes iguais.

4. Conclusão

Neste trabalho, demonstramos o Teorema de Borsuk-Ulam para o caso bidimensional por meio de ferramentas da topologia algébrica. Nosso caminho foi usar resultados sobre o grupo fundamental e homotopia para provar um fato essencial: a não existência de uma aplicação contínua que preserve antípodas de $\mathbb{S}^2$ para $\mathbb{S}^1$. Com isso em mãos, a demonstração do teorema principal se desenvolveu por absurdo.

O foco do trabalho foi chegar em uma aplicação: o Teorema da Panqueca. Como vimos, ele garante que duas áreas finitas no plano podem ser cortadas ao meio por uma única reta. Começamos em algo bastante abstrato que foi o grupo fundamental e terminamos na solução de um problema geométrico bem concreto e visual, isso nos mostra a força da topologia algébrica, cumprindo o objetivo que foi proposto no início.

Referências

ARBOLEYA, Pablo et al. Topologia Geral e Algébrica: Invariantes Topológicos. In: COLEÇÃO de Pesquisas do PETMAT. Londrina, PR, Universidade Estadual de Londrina, PET Matemática: [s.n.], 2024. P. 149–212.

MUNKRES, James R. **Topology**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

ROTMAN, Joseph J. **An introduction to Algebraic Topology**. New York, NY: Springer-Verlag, 1988.