

PROPRIEDADES DE SEMIGRUPOS GERADOS POR MODELOS ABSTRATOS DO TIPO TIMOSHENKO

*Autor 1 – Leonardo Gustavo Ronchin Alves
Universidade Estadual de Maringá
leonardosgustavo@gmail.com*

Resumo:

No presente trabalho, estudamos um modelo abstrato do tipo Timoshenko com dissipação friccional dada em termos de potências fracionárias de um operador auto-adjunto, estritamente positivo e com domínio densamente definido em um espaço de Hilbert separável. Primeiramente, demonstramos a existência e unicidade de solução do modelo por meio da teoria dos semigrupos lineares. Em seguida, investigamos quais condições devem ser impostas às potências fracionárias para que o semigrupo gerado seja exponencialmente estável, analítico ou pertença a alguma classe de Gevrey.

Palavras-chave: Sistema de Timoshenko Abstrato; Semigrupos Lineares; Estabilidade Exponencial; Analiticidade.

1. Introdução

O sistema de Timoshenko proposto por TIMOSHENKO (1937) é um modelo matemático amplamente utilizado nas áreas de Engenharia e Física para estudar a dinâmica do movimento de uma viga. As equações que descrevem esse movimento, incluindo os efeitos dissipativos, são dadas por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \text{dissipação}_\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \text{dissipação}_\psi = 0. \quad (2)$$

A função φ representa o deslocamento vertical, enquanto ψ denota a variação do ângulo da reta normal em relação ao eixo horizontal. As constantes positivas k , b , ρ_1 e ρ_2 representam propriedades físicas da viga.

O sistema (1)-(2) é, em geral, estudado sob a ação de dissipações atuando em apenas uma das equações (isto é, com $\text{dissipação}_\varphi = 0$ ou $\text{dissipação}_\psi = 0$), ou em ambas simultaneamente.

Em ALABAU (2007), ALMEIDA JÚNIOR (2013), AMMAR-KHODJA (2007), MUÑOZ RIVERA (2008), SOUFYANE (1999) e WEHBE (2009), observa-se que, no caso em que o efeito dissipativo atua apenas em uma das equações, a estabilidade exponencial do sistema só é alcançada sob a suposição de igualdade das velocidades de propagação das ondas, dada por

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}. \quad (3)$$

Embora a condição (3) seja válida do ponto de vista matemático, ela nunca é satisfeita em situações físicas reais. Essa limitação motivou o desenvolvimento de estudos que consideram dois efeitos dissipativos, com o objetivo de garantir a estabilidade exponencial independentemente da validade de (3). Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de CAVALCANTI (2014), MUÑOZ RIVERA (2023), RAPOSO (2005) e TEBOU (2015), nos quais a estabilidade exponencial é obtida sem a necessidade de assumir a condição (3).

Neste trabalho, propomos uma reformulação do sistema (1)-(2) em uma forma generalizada, por meio de um modelo abstrato com potências fracionárias. Essa abordagem permite o estudo das regiões de estabilidade e regularidade em função dessas potências, analisando os diferentes regimes de forma contínua, e não apenas em casos pontuais, como ocorre nos trabalhos citados anteriormente.

Dentre os resultados presentes na literatura que tratam de modelos abstratos, baseamo-nos nas ideias propostas por AMMARI (2021), CHENG (1990, 1989), DANESE (2016), FERNÁNDEZ SARE (2019), KUANG (2021), MENDES (2023) e SUÁREZ (2023). Em particular, destacamos os resultados apresentados em DANESE (2016), MENDES (2023) e SUÁREZ (2023), que tratam de sistemas do tipo Timoshenko e da dissipação dada por potências fracionárias de operadores.

2. Modelo Abstrato do tipo Timoshenko

O objetivo deste trabalho é estudar o seguinte sistema de equações, conhecido como modelo abstrato do tipo Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} + k A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} \varphi + \psi) + A^\alpha \varphi_t = 0, \quad (4)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} + b A \psi + k (A^{\frac{1}{2}} \varphi + \psi) + A^\beta \psi_t = 0. \quad (5)$$

Em que $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador estritamente positivo, auto-adjunto e com o domínio densamente imerso no espaço de Hilbert separável $(H, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Os coeficientes ρ_1, ρ_2, k e b são constantes positivas e, consideramos ainda $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Além disso, para obtenção da falta de estabilidade exponencial e analiticidade, assumiremos como hipótese que A^{-1} existe e é um operador compacto.

Observação 1: As condições assumidas sobre o operador A garantem que suas potências fracionárias estejam bem definidas.

Observação 2: As propriedades requeridas em $A, D(A)$ e H , são satisfeitas ao considerarmos $H = L^2(0, \ell)$ e o operador linear $A(\cdot) = -(\cdot)_{xx}$ com domínio $D(A) = H^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell)$.

3. Teoria de Semigrupos Lineares

A fim de estudar o problema (4)-(5) via teoria de semigrupos lineares, consideramos o espaço de fase $\mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{H} = D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times D(A^{\frac{1}{2}}) \times H,$$

munido com a norma

$$\|(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi})\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2.$$

Deste modo, tomando $U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi})$, em que $\tilde{\varphi} = \varphi_t$ e $\tilde{\psi} = \psi_t$, podemos reescrever o problema em sua forma matricial da seguinte forma

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \quad (6)$$

onde $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \\ \psi \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\frac{1}{\rho_1}A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi) - \frac{k}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}\psi \\ \tilde{\psi} \\ -\frac{1}{\rho_2}A(A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi) - \frac{k}{\rho_2}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} : \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in D(A^{\frac{1}{2}}), \quad A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi \in D(A), \quad A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi \in D(A) \right\}.$$

Deste modo, estudar o problema (4)-(5) é equivalente a estudar o (6). A fim de garantir existência e unicidade de solução, verificamos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$.

Assim, fixado $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (8)$$

admite uma única solução $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$, com $U \in C([0, \infty), \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução $U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), X)$.

Garantida a existência e unicidade de solução, buscamos estudar a estabilidade e a regularidade da solução por meio das propriedades do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$. Primeiro, buscamos determinar quais as condições necessárias para que o semigrupo seja exponencialmente estável, isto é, quando existem constantes $C, \gamma > 0$ tais que

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Para tanto, utilizamos o resultado proposto por PRUSS (2009), que caracteriza a estabilidade exponencial por meio do resolvente do operador $\mathcal{A}$ da seguinte forma: um C_0 -semigrupo de contrações $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Para investigar as condições de regularidade, analisamos quando o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ é diferenciável. Inicialmente, verificamos quando esse semigrupo é analítico. Para tanto, utilizamos a caracterização de analiticidade como feita por ZHENG (2004): um semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ fortemente estável é analítico se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda| \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Sabemos que a analiticidade implica a diferenciabilidade do semigrupo, contudo, veremos que a região na qual essa propriedade é obtida é restrita. Para ampliarmos as regiões de regularidade, investigamos quando um semigrupo pertence a alguma classe de Gevrey. Segundo TAYLOR (1989), um C_0 -semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ é de Gevrey de classe $\delta > 1$, se $t \mapsto S_{\mathcal{A}}(t)$ é diferenciável e para quaisquer $\mu > 0$ e $K \subset (0, \infty)$ compacto,

existe $C > 0$ tal que

$$\|S^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\mu^n(n!)^\delta, \quad \forall t \in K \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Seguindo o método proposto por TAYLOR (1989), também podemos verificar esta propriedade por meio do operador resolvente de $\mathcal{A}$. Precisamente, seja $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo limitado e fortemente estável. Se para algum $0 < \tau < 1$ a seguinte condição é verdadeira

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda|^\tau \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty,$$

então o semigrupo é de Gevrey de classe $\delta > \frac{1}{\tau}$, para $t > 0$.

Dessa forma, para obter a estabilidade e a regularidade da solução do problema, devemos primeiro mostrar que o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ é fortemente estável, o que é equivalente a demonstrar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Com isso, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F \in \mathcal{H}$, sabemos que existirá um único $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \quad (9)$$

Deste modo, para aplicar os resultados anteriores, o nosso objetivo se resume a obter estimativas do tipo

$$|\lambda|^{\tau(\alpha, \beta)} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (10)$$

de modo que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ será:

- (a) Exponencialmente estável quando $\tau = 0$;
- (b) Analítico quando $\tau = 1$;
- (c) De Gevrey de classe $\delta > \frac{1}{\tau}$ quando $0 < \tau < 1$.

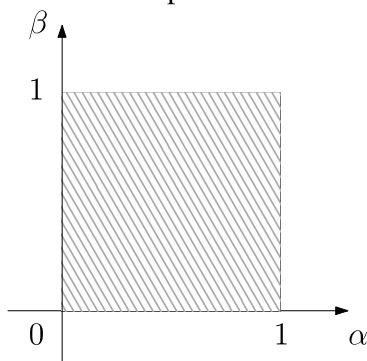
4. Resultados Obtidos

Seguindo o raciocínio exposto na seção anterior, primeiro demonstramos que, para quaisquer $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Consequentemente, a equação resolvente (9) está bem definida, permitindo-nos estudar estimativas do tipo (10).

Nosso primeiro resultado principal estabelece a estabilidade exponencial do semigrupo. Especificamente, provamos que, para quaisquer $\alpha, \beta \in [0, 1]$, o semigrupo

$\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável.

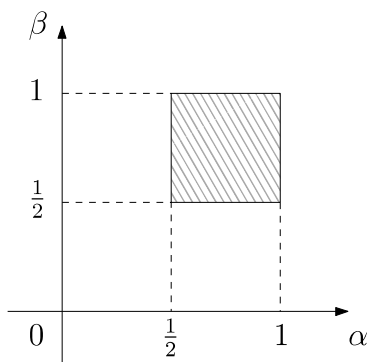
Figura 1 – Região de Estabilidade Exponencial



Fonte: O próprio autor

Uma vez garantida a estabilidade do problema, buscamos estudar a regularidade da solução por meio da diferenciabilidade do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$. Para isso, distinguimos dois casos: um em que o semigrupo é analítico e outro em que ele pertence a alguma classe de Gevrey. No primeiro caso, nosso resultado principal estabelece que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ é analítico se, e somente se, $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Figura 2 – Região de Analiticidade



Fonte: O próprio autor

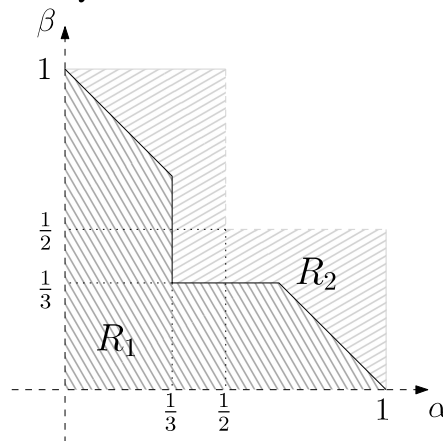
Para o segundo caso, determinamos as classes de Gevrey do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ na região complementar àquela de analiticidade. Para isso, definimos as seguintes regiões:

$$R_1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \min\{\alpha, \beta\} \leq \frac{1}{3} \text{ e } \alpha + \beta \leq 1\}$$

e

$$R_2 = [(0, 1] \times (0, 1] \setminus [R_1 \cup ([\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1])]$$

Figura 3 – Classe de Gevrey



Fonte: O próprio autor

Assim, o nosso último resultado estabelece que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ é de Gevrey de classe $\delta > \frac{1}{\tau(\alpha, \beta)}$ em $R_1 \cup R_2$, em que

$$\tau(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2 \min\{\alpha, \beta\}, & (\alpha, \beta) \in R_1, \\ \min\{\alpha, \beta\}, & (\alpha, \beta) \in R_2. \end{cases}$$

Destacamos também que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$ também é de Gevrey na região de analiticidade, isto é, quando $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Referências

ALABAU-BOUSSOIRA, F. Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control. **Nonlinear Differ. Equ. Appl.**, v. 14, p. 643–669, 2007.

ALMEIDA JÚNIOR, D. S.; SANTOS, M. L.; MUÑOZ RIVERA, J. E. Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. **Math. Meth. Appl. Sci.**, v. 36, p. 1965–1976, 2013.

AMMAR-KHODJA, F.; KERBAL, S.; SOUFYANE, A. Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam. **J. Appl. Math. Anal. Appl.**, v. 1, p. 525–538, 2007.

AMMARI, K.; SHEL, F.; TEBOU, L. Regularity and stability of the semigroup associated with some interacting elastic systems I: a degenerate damping case. **J. Evol. Equ.**, v. 21, p. 4973–5002, 2021.

CAVALCANTI, M. M. et al. Uniform decay rates for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping. **Z. Angew. Math. Phys.**, v. 65, p. 1189–1206, 2014.

CHENG, S. P.; TRIGGIANI, R. Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle dissipation: the case $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. **Proc. Am. Math. Soc.**, v. 110, p. 401–415, 1990.

_____. Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems. **Pacific J. Math.**, v. 136, p. 15–55, 1989.

DANESE, V.; DELL'ORO, F.; PATA, V. Stability analysis of abstract systems of Timoshenko type. **J. Evol. Equ.**, v. 16, p. 587–615, 2016.

FERNÁNDEZ SARE, H. D.; LIU, Z.; RACKE, R. Stability of abstract thermoelastic systems with inertial terms. **J. Differ. Equ.**, v. 12, p. 7085–7134, 2019.

KUANG, Z.; LIU, Z.; FERNÁNDEZ SARE, H. D. Regularity Analysis for an Abstract Thermoelastic System with Inertial Term. **ESAIM: COCV**, v. 27, s24, 2021.

MENDES, F. B. R.; SOBRADO, L. D. B.; SUÁREZ, F. M. S. Regularity to Timoshenko's System with Thermoelasticity of Type III with Fractional Damping. **Ciências Exatas e da Terra: Teorias e Princípios 2**, Editora Atena, 2023.

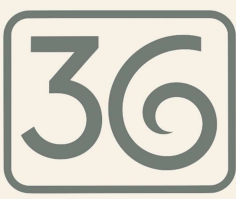
MUÑOZ RIVERA, J. E.; NASO, M. G. Stability to Signorini Problem with Pointwise Damping. **Appl. Math. Optim.**, v. 61, p. 1–31, 2023.

MUÑOZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. Timoshenko systems with indefinite damping. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 341, p. 1068–1083, 2008.

PRUSS, J. On the Spectrum of C_0 -Semigroups. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 284, p. 847–857, 2009.

RAPOSO, C. A. et al. Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings. **Appl. Math. Lett.**, v. 18, p. 535–541, 2005.

SOUFYANE, A. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. **C. R. Acad. Sci. Paris**, v. 8, p. 731–734, 1999.



SUÁRES, F. M. S. Regularity for the Timoshenko system with fractional damping. **arXiv:2308.00573v2**, 2023.

TAYLOR, S. Gevrey **Regularity of Solutions of Evolution Equations and Boundary Controllability**. 1989. Ph.D. Thesis – University of Minnesota, Minnesota.

TEBOU, L. A localized nonstandard stabilizer for the Timoshenko beam. **C. R. Acad. Sci. Paris**, v. 353, p. 247–253, 2015.

TIMOSHENKO, S. **Vibration Problems in Engineering**. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1937.

WEHBE, A.; YOUSSEF, W. Stabilization of the uniform Timoshenko beam by one locally distributed feedback. **Appl. Anal.**, v. 88, p. 1067–1078, 2009.

ZHENG, S. **Nonlinear Evolution Equations**. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2004.