

CONJUNTOS DE CANTOR E DIAGRAMAS DE BRATTELI

*Autor 1 – Miguel Costenaro Andrielli
Universidade Estadual de Londrina
miguelc.andrielli@uel.br*

*Autor 2 e Orientador – Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina
tuliocarvalho@uel.br*

Resumo:

O conjunto de Cantor dos terços médios é uma estrutura básica para a matemática, sendo estudado na disciplina curricular de análise real. Este conjunto é não vazio, totalmente desconexo, com interior vazio, compacto, mas não possui pontos isolados. Tais propriedades são definidoras de conjuntos de Cantor em outros espaços além da reta real. Os diagramas de Bratteli podem ser descritos como um grafo orientado: os pontos em um dado diagrama de Bratteli pertencem a um produto cartesiano infinito de conjuntos finitos, o objetivo do trabalho é, através destas propriedades do Diagrama de Bratteli, associá-los a diferentes conjuntos de Cantor. Este trabalho foi desenvolvido como um projeto de iniciação científica dentro do programa PET-Matemática.

Palavras-chave: Conjunto de Cantor; espaços métricos compactos; diagramas de Bratteli

1. Introdução

Os modelos de conjunto de Cantor são numerosos, originados da dinâmica expansiva de aplicações unidimensionais, também presente na chamada ferradura de Smale, entre outras caracterizações como conjuntos fractais *atratores* de sistemas dinâmicos satisfazendo certas condições de expansividade (Katok, 1996). Além destas, ainda mais presente é a construção algorítmica conhecida em livros texto de cursos de análise real como (Lima, 2022).

O presente trabalho oferece um modelo apresentado em (Putnam, 2018) que despertou o interesse dos autores, e que nos parece cativante, pelo seu caráter abstrato, e por esta razão profícuo de aplicações. A título de introdução, para o nível de graduação, cumpre mencionar o aspecto informativo de transpor para espaços métricos arbitrários os conjuntos totalmente desconexos, compactos e sem pontos isolados, propriedades topológicas que trazem em sua combinação um quebra-cabeças àqueles que se interessam pela matemática.

2. Conjuntos de Cantor

Nesta seção apresentamos a definição geral de conjuntos de Cantor, sem a referência da construção dos mesmos como subconjuntos da reta real. Os conceitos de topologia estudados através de (Munkres, 2014) indicam as etapas da construção teórica. Assume-se dado um espaço topológico dado por um conjunto não-vazio X e uma coleção de abertos, *topologia*, τ .

Definição 2.1. Um espaço topológico é dito *totalmente desconexo* se os únicos subconjuntos conexos são os conjuntos unitários e o conjunto vazio.

Dada uma topologia τ , se $A \subset X$ é um aberto, significa que $A \in \tau$. Os conjuntos *fechados* A são aqueles tais que $X - A \in \tau$. Pode acontecer que $A \in \tau$ e $X - A \in \tau$ simultaneamente. Chamaremos os conjuntos que satisfazem esta propriedade, isto é, de serem abertos e fechados, de *fechertos*. Lembrando que $\emptyset, X \in \tau$, qualquer que seja a topologia τ , temos pelo menos dois fechertos em cada espaço topológico. O seguinte resultado nos fornece uma propriedade importante dos fechertos em um espaço métrico compacto.

Lema 2.2. Seja (X, d) um espaço métrico compacto e suponha U um fecherto de X . Então existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$ para todo $x \in U$ e $y \in X - U$.

Com o auxílio deste lema, obtemos o seguinte resultado que nos garante uma abundância de fechertos em um espaço métrico compacto totalmente desconexo.

Lema 2.3. Seja (X, d) um espaço métrico compacto totalmente desconexo e $x \in X$.

- i) A interseção de todos os fechertos que contêm x é $\{x\}$;
- ii) $\forall x \in X$ e $r > 0$ existe um fecherto U com $x \in U \subseteq B(x, r)$. Isto é, os conjuntos fechertos formam uma base para a topologia de X .

A ideia de partição do espaço métrico compacto X por fechertos U é definida a seguir. A existência de partições afunilantes (ver definição 2.7) vai garantir as condições para que X seja totalmente desconexo.

Definição 2.4. Seja X um espaço topológico. Uma *partição* de X é uma coleção finita de fechertos dois a dois disjuntos cuja união é X .

Definição 2.5. Dadas duas partições P_1 e P_2 de X , dizemos que P_2 é *mais fina* que P_1 se todo elemento de P_2 está contido em um elemento de P_1 . Se P_2 é mais fina que P_1 , escrevemos $P_1 \succeq P_2$.

Um resultado útil para trabalharmos com estas partições é:

Lema 2.6. Sejam P_1 e P_2 duas partições de X . Então $P_1 \succeq P_2$ se, e somente se, todo elemento de P_1 pode ser escrito como uma união de elementos de P_2 .

Demonstração. Suponha que $P_1 \succeq P_2$, assim, dado $U \in P_1$ considere para cada $x \in U$ o único elemento $V_x \in P_2$ tal que $x \in V_x$. Como V_x está contido em algum elemento de P_1 , esse elemento deve conter x e o único que satisfaz isso é U , logo $V_x \subset U$, então

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U.$$

assim, $U = \bigcup_{x \in U} V_x$.

A recíproca segue da Definição 2.5. □

Note que uma partição é uma cobertura aberta de X e, como trabalharemos com X compacto, podemos tomar partições finitas de X . A existência de uma partição nos fornece um conjunto finito de fechertos para X . A etapa final é dada pelo aporte do conceito de sequência, modelada pelo *diâmetro* de uma partição. O diâmetro de uma partição (ou família de abertos) é definido como o máximo entre as distâncias de dois pontos em cada elemento da partição.

Definição 2.7. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Uma *sequência de partições afunilantes* é uma sequência $\mathcal{P}_n, n \geq 1$ tal que

1. Cada $\mathcal{P}_n$ é partição de X ;
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \succeq \mathcal{P}_{n+1}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{P}_n) = 0$.

O seguinte resultado nos mostra que se X possui uma sequência de partições afunilantes, podemos obter qualquer fecherto de X em termos de uniões de elementos de uma partição desta sequência.

Proposição 2.8. Seja (X, d) um espaço métrico compacto e suponha dada uma sequência $(\mathcal{P}_n), n \geq 1$ de partições afunilantes. Se $U \subset X$ é fecherto, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U = \bigcup_{\{V \in \mathcal{P}_n \mid V \cap U \neq \emptyset\}} V.$$

Demonstração. É claro que $U \subset \bigcup_{\{V \in \mathcal{P}_n \mid V \cap U \neq \emptyset\}} V$, pois cada $\mathcal{P}_n$ é uma partição de X .

Por outro lado, pelo Lema 2.2 existe $\delta > 0$ tal que dado $x \in U$ e $y \in X - U$, então $d(x, y) \geq \delta$. Repare que δ depende somente de U .

Como $\text{diam}_{V \in \mathcal{P}_n}(V) \rightarrow 0$ à medida que $n \rightarrow \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$, $\text{diam}(V) < \delta$ para todo $V \in \mathcal{P}_n$. Tomando tal n , temos que $V \cap U \neq \emptyset$ implica que $V \subset U$, para todo $V \in \mathcal{P}_n$, pois caso contrário, teríamos $\text{diam}(V) \geq \delta$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Outro conceito importante para nosso estudo é o de ultramétrica.

Definição 2.9. Seja X um conjunto. A função $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ é uma *ultramétrica* se satisfaz

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$;
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

Dizemos que (X, d) é um *espaço ultramétrico*.

As duas primeiras condições são equivalentes à definição usual de métrica. Se nos atentarmos à terceira condição e compararmos com a desigualdade triangular usual, perceberemos rapidamente que uma ultramétrica também é uma métrica, porém esta condição de $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ nos fornece propriedades bem interessantes, como a de que todo triângulo em um espaço ultramétrico é um triângulo isósceles.

Lema 2.10. Se (X, d) é um espaço ultramétrico, então duas bolas abertas de raio $r > 0$ ou são iguais, ou são disjuntas. Em particular, se X é compacto, então toda bola aberta de raio r é um fechado e a coleção de todas as bolas abertas de raio r formam uma partição de X .

Demonstração. Suponha que exista $x \in B(a, r) \cap B(b, r)$. Então

$$d(a, b) \leq \max\{d(a, x), d(b, x)\} < r.$$

Disto decorre que $a \in B(b, r)$ e $b \in B(a, r)$. Por outro lado, se $y \in B(a, r)$, então $d(y, b) \leq \max\{d(y, a), d(a, b)\} < r$, donde $y \in B(b, r)$. Portanto $B(a, r) \subset B(b, r)$. Analogamente, temos $B(b, r) \subset B(a, r)$, e a primeira afirmação está provada.

Para ver que $B(a, r)$ é um fechado, escreva

$$X = B(a, r) \cup (X - B(a, r)) .$$

Se $X - B(a, r) = \emptyset$, não há o que provar. Por outro lado,

$$X - B(a, r) = \cup_{x \in B(a, r)^c} B(x, r)$$

é uma união de bolas abertas, todas disjuntas de $B(a, r)$. Isto diz que $B(a, r)$ é complementar de um aberto, como queríamos.

Pelo que provamos, X se escreve como união de bolas disjuntas que são fechados, o que caracteriza a coleção de bolas abertas de raio r como uma partição de X . $\square$

Com isto, obtemos um dos principais Teoremas deste trabalho:

Teorema 2.11. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. (X, d) é totalmente desconexo;
2. (X, d) possui uma sequência de partições afunilantes;
3. Existe uma ultramétrica d' em X que gera a mesma topologia que d .

Assim, conseguimos finalmente definir um conjunto de Cantor em um espaço métrico arbitrário.

Definição 2.12. Um *conjunto de Cantor* é um subconjunto não-vazio, compacto, totalmente desconexo e sem pontos isolados de um espaço métrico (X, d) .

Observe que o Lema 2.3 fornece o contexto para a ausência de pontos isolados em conjuntos de Cantor.

3. Diagramas de Bratteli

Passamos agora ao objetivo de buscar uma forma de associar um conjunto de Cantor definido anteriormente com os *diagramas de Bratteli* que são um tipo de grafo infinito. Considere uma sequência de conjuntos finitos de vértices $V_0, V_1, V_2, \dots$ satisfazendo $V_0 = \{v_0\}$ é unitário, todos os elementos da sequência são finitos, não vazios e dois a dois disjuntos. Além disso, considere também uma sequência de ligações $E_1, E_2, \dots$, com cada E_i conjunto finito, não-vazio e dois a dois disjuntos.

Cada ligação em E_n , $n \geq 1$, sai de um vértice em V_{n-1} para outro vértice em V_n . Vamos requerer também que, exceto por V_0 , não existam outros vértices que sejam ponto inicial de um caminho simbolizado por uma sequência $(x_1, x_2, \dots)$.

Definição 3.1. Um *diagrama de Bratteli* denotado por (V, E) consiste em uma sequência infinita de conjuntos finitos dois a dois disjuntos $V_0 = \{v_0\}, V_1, V_2, \dots$ chamados de *vértices*, outra sequência de conjuntos finitos, não vazios e dois a dois disjuntos $E_1, E_2, \dots$ chamados de *ligações* e duas aplicações:

$$s : E_n \rightarrow V_{n-1} \quad \text{e} \quad r : E_n \rightarrow V_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Estas aplicações s e r são chamadas de *origem* e *destino* respectivamente. As funções s e r são tais que $r^{-1}(v) \neq \emptyset, \forall v \in \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ e $s^{-1}(v) \neq \emptyset, \forall v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Note que a função s leva uma ligação $e \in E_j$ ao seu vértice de origem em V_{j-1} e r leva $e \in E_j$ ao seu vértice de chegada em V_j .

Definição 3.2. Seja (V, E) um diagrama de Bratteli e $0 \leq m \leq n$, denotamos por $E_{m,n}$ o conjunto de todos os caminhos de V_m para V_n , isto é,

$$E_{m,n} = \{(p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_i) | p_i \in E_i, m < i \leq n, r(p_i) = s(p_{i+1}), m < i < n\}$$

A partir de um diagrama de Bratteli, queremos construir um espaço X compacto e totalmente desconexo, este espaço X será denotado por X_E e consistirá em todos os infinitos caminhos a partir do vértice v_0 . Também definiremos uma métrica em X_E .

Definição 3.3. Seja (V, E) um diagrama de Bratteli. Defina:

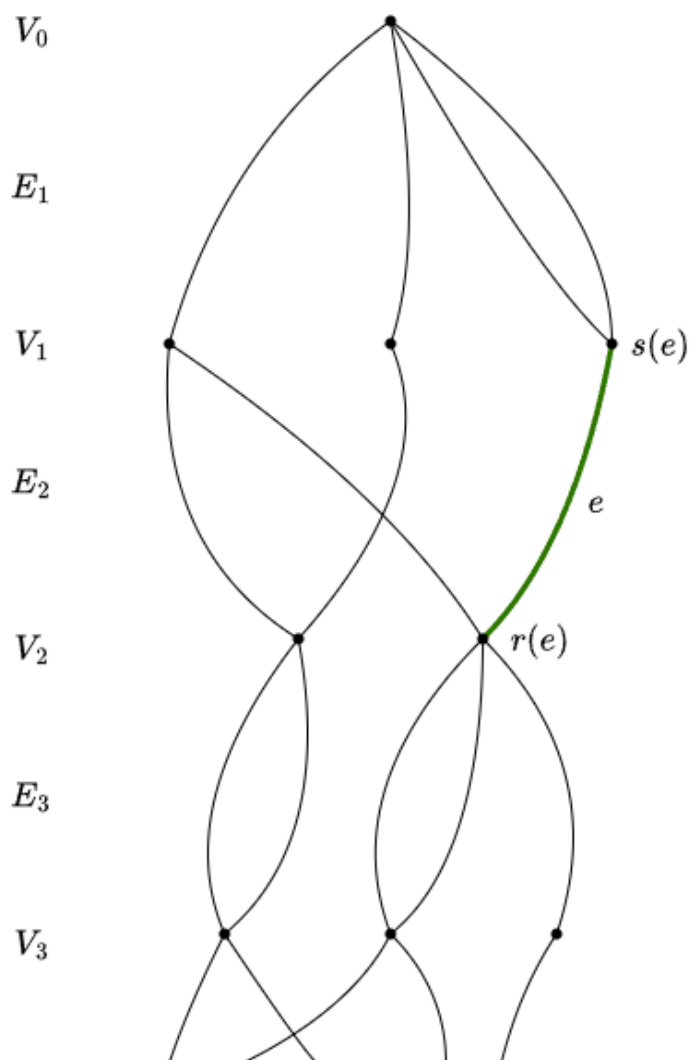
$$X_E = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) | x_n \in E_n, r(x_n) = s(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Além disso, defina a métrica $d : X_E \times X_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ como

$$d(x, y) = \inf \{1, 2^{-n} | n \text{ é o menor natural tal que } (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)\}$$

Observe que cada $x \in X_E$ é uma sequência de ligações, um caminho infinito no diagrama da Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de Diagrama de Bratteli



Fonte: Os autores.

Definição 3.4. Se (V, E) é um diagrama de Bratteli. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p \in E_{0,n}$ definimos

$$C(p) = \{x \in X_E \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) = p\}$$

e chamamos este conjunto de *cilindro*.

A próxima proposição nos fornecerá diversos resultados interessantes que nos auxiliarão em nosso objetivo.

Proposição 3.5. Seja (V, E) um diagrama de Bratteli. Os seguintes resultados são válidos:

- (1) (X_E, d) é um espaço ultramétrico.
- (2) $\forall x \in X_E$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que $B(x, 2^{-n+1}) = C(x_1, \dots, x_{n-1})$.

- (3) $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall p, q \in E_{0,n}$, temos que $C(p) = C(q)$ se, e somente se $p = q$. Caso contrário, ambos os cilindros são disjuntos.
- (4) $\forall n \in \mathbb{N}$, a coleção de conjuntos $\{C(p) | p \in E_{0,n}\}$ é uma partição de X_E .
- (5) Para cada $p \in E_{0,n}$, com $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$C(p) = \bigcup_{e \in E_{n+1}} C(pe)$$

onde e é tal que $s(e) = r(p)$. Além disso, os conjuntos nesta união são dois a dois disjuntos.

- (6) A sequência $\{C(p) | p \in E_{0,n}\}, n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de partições afunilantes de X_E .

Demonstração. Vamos separar esta demonstração em cada item da proposição:

- (1) Devemos mostrar que $d(x, y)$ dada pela definição 3.3 é uma ultramétrica. Seja $p = (x_1, \dots, x_n)$ a sequência de comprimento $n \geq 0$ tal que $p = (y_1, \dots, y_n)$. $d(x, x) = 0$ decorre de que n pode ser tomado arbitrariamente grande. A simetria $d(x, y) = d(y, x)$ é auto-evidente. Se $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots)$, seja q a sequência de comprimento $|q|$ tal que $(z_1, \dots, z_{|q|}) = (x_1, \dots, x_{|q|})$. Se $|q| \leq |p| = n$, então $d(x, z) \geq d(x, y)$. Se $|q| > n$, não há como z_{n+1} coincidir com x_{n+1} e y_{n+1} simultaneamente, pois estes diferem entre si. Portanto

$$\max\{d(x, z), d(y, z)\} = 2^{-n} = d(y, z).$$

Portanto, (X_E, d) é um espaço ultramétrico.

- (2) Mostraremos este item por indução.

Para $n = 1$, temos que $d(x, y) \leq 1$. O membro esquerdo é $B(x, 1) = X_E$. O membro direito é o cilindro definido pela palavra vazia, que contém todas as possíveis sequências de ligações.

Considere agora $n > 1$, então $k = n - 1 > 0$ e assim

$$C(x_1, x_2, \dots, x_k) = \{y \in X_E | (y_1, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_k)\}.$$

Suponha $y \in B(x, 2^{-n+1})$, então $d(x, y) \leq 2^{-k}$ e consequentemente $(y_1, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_k)$.

Agora suponha $y \in C(x_1, \dots, x_k)$. Como $k \geq 1$, temos que $d(x, y) = 2^{-k}$. Pelo Lema 2.10, a bola é um fecherto, e portanto $y \in B(x, 2^{-k}) = B(x, 2^{-n+1})$.

- (3) Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer e $p, q \in E_{0,n}$, suponha que $p \neq q$. Como (X_E, d) é um espaço ultramétrico, pelo Lema 2.10 sabemos que $B(p, 2^{-n+1}) = C(p)$ e $B(q, 2^{-n+1}) = C(q)$ são disjuntos. Por outro lado, se $C(p) \neq C(q)$, pelo mesmo argumento chegamos que não pode ocorrer $p = q$.
- (4) De fato, cada $C(p) = B(p, 2^{-n+1})$ nesta coleção são disjuntos para $p, q \in E_{0,n}$ distintos. Pelo Lema 2.10, as bolas distintas $B(p, 2^{-n+1})$, com p variável e n fixo, formam uma partição de X_E .
- (5) Seja $x \in C(p)$, então $(x_1, x_2, \dots, x_n) = p$. Existe $e \in E_{n+1}$ tal que $s(e) = r(x_n)$, então $x \in C(pe)$ e consequentemente está na união. Por outra parte, é evidente que $C(pe) \subset C(p)$ para cada p de comprimento $n \geq 1$ e cada $e \in E_{n+1}$ tal que $s(e) = r(x_n)$. Por outro lado, tem-se $C(\emptyset) = X_E \supset C(e)$ para cada $e \in E_1$.
- (6) De fato, como X_E é compacto, sabemos pelo Lema 2.10 que a família

$$\{C(p) = B(p, 2^{-n+1}) | x \in X_E \text{ e } (x_1, \dots, x_n) = p\}$$

é uma coleção de fechertos disjuntos que forma uma partição de X_E . Se $p = (x_1, \dots, x_n)$, denotemos tal família por $\mathcal{C}_n$. Vamos mostrar que $\mathcal{C}_{n+1} = \{C(p) | p \in E_{0,n+1}\}$ é mais fina que $\mathcal{C}_n = \{C(h) | h \in E_{0,n}\}$, isto é $\mathcal{C}_n \succeq \mathcal{C}_{n+1}$.

Dado $C(h) \in \mathcal{C}_n$, pelo item (5) sabemos que

$$C(h) = \bigcup_{e \in E_{n+1}} C(pe),$$

onde $s(e) = r(p)$ e cada $C(pe) \in \mathcal{C}_{n+1}$, logo todo elemento de $\mathcal{C}_n$ pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{C}_{n+1}$, logo $\mathcal{C}_n \succeq \mathcal{C}_{n+1}$.

Por fim, devemos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \mathcal{C}_n = 0$. Para isso, note que todo elemento de $\mathcal{C}_n$ é uma bola no espaço ultramétrico e todas possuem o mesmo raio, sabemos que

$$\text{diam } \mathcal{C}_n = \max\{d(x, y) | x, y \in B(x, 2^{-n+1})\} = 2^{-n},$$

cujo limite, para $n \rightarrow \infty$, é 0.

Portanto, $\mathcal{C}_n = \{C(p) | p \in E_{0,n}\}$ é uma sequência de partições afunilantes de X_E .

□

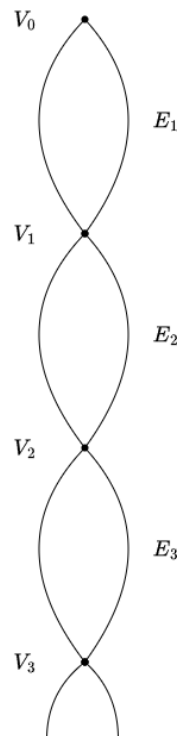
Teorema 3.6. Seja (V, E) um diagrama de Bratteli. O espaço métrico (X_E, d) é compacto.

4. Resultados Parciais da Pesquisa

Considerando que a construção acima é teórica, a exibição de diagramas de Bratteli constitui uma prova de existência de conjuntos de Cantor em espaços métricos.

Considere o seguinte diagrama de Bratteli

Figura 2



Fonte: Os autores.

Note que, considerando que este padrão se repita infinitamente, todos os conjuntos de vértices são unitários e todos os conjuntos de ligações E_j possuem exatamente 2 elementos.

Sendo assim, no diagrama, se para cada E_j associamos a ligação da esquerda com 0 e a da direita com 1, qualquer percurso que traçarmos no diagrama de Bratteli nos fornece uma sequência infinita de 0's e 1's. Este diagrama nos permite descrever o espaço $X_E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Denotamos por $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ um elemento qualquer de X_E e definimos a ultramétrica

$$d(x, y) = \inf\{1, 2^{-n} \mid n \geq 1, x_i = y_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$$

Com esta métrica d , o Teorema 3.6 nos garante que (X_E, d) é compacto e da Proposição 3.5 e do Teorema 2.11 obtemos que (X_E, d) não possui pontos isolados e



os únicos subconjuntos conexos são conjuntos unitários. Portanto X_E é um conjunto de Cantor.

Referências

KATOK, Anatole. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.

MUNKRES, James. **Topology**. Upper Saddle River: Pearson Education, 2014.

PUTNAM, Ian F. **Cantor Minimal Systems**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2018.