



TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA: UMA EXPERIÊNCIA EM UM PROJETO DE EXTENSÃO

Laís Jacinto Faria¹

Universidade Estadual de Londrina

lais.jacinto.faria@uel.br

Beatriz Archilla Sassá²

Universidade Estadual de Londrina

beatriz.archilla@uel.br

Magna Natalia Marin Pires³

Universidade Estadual de Londrina

magna@uel.br

Resumo:

O objetivo desse trabalho é relatar a experiência dos graduandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina em um projeto de extensão no formato de oficina. O projeto tem como objetivo principal discutir conteúdos da Educação Básica, planejar aulas desses conteúdos e oferecer oficinas nas escolas da Rede Pública Estadual e para estudantes do 1º ano da Graduação em Matemática. No segundo semestre de 2024 foram discutidos três temas: relações métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas e trigonometria na circunferência. Para este relato escolhemos abordar as razões trigonométricas e a trigonometria na circunferência. O grupo de estudantes, participantes do projeto, pode comprovar a eficácia do ensino na modalidade oficina para o aprendizado dos alunos da Educação Básica e, o contato mais de perto com o tema estudado favorece muito a compreensão do conteúdo por parte dos graduandos.

Palavras-chave: Oficina; Trigonometria; Projeto de Extensão; Graduação em Matemática.

1. Introdução

O presente trabalho versa sobre a criação e desenvolvimento do projeto de extensão “O Curso de Matemática da UEL em parceria com as Escolas de Educação

¹ Estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

² Estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

³ Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL, professora do departamento de Matemática da UEL.

Básica: Fortalecendo Saberes Matemáticos” pensado por estudantes em conjunto com professores da Universidade Estadual de Londrina. O projeto foi desenvolvido a partir de reflexões dos estudantes sobre o aprendizado dos alunos, entrar em uma sala de aula e discorrer 50 minutos sobre determinado conteúdo enquanto os alunos escutam não significa que eles estão prestando atenção e aprendendo, mesmo que estejam em silêncio. Determinados conteúdos são compreendidos pelos estudantes quando abordados de maneira mais didática e interessante, assim cabe ao professor analisar qual estratégia será utilizada, levando em consideração o colégio, a turma, o tempo disponível, entre outros fatores.

Levando isso em consideração, a modalidade oficina surgiu como uma alternativa para o ensino de matemática. As oficinas são caracterizadas por momentos em que os estudantes constroem conhecimento por meio de experimentos, tentativas e erros, elaboração de conjecturas, testagem dessas conjecturas, entre outros. Para os estudantes da Educação Básica e também de um curso de graduação, pode ser muito mais interessante comprovar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° usando papel e tesoura, do que apenas ler no quadro a afirmação e aceitar. Quando se aprende algo ouvindo é fácil esquecer, mas quando se aprende fazendo é raro não se lembrar (inspirado nas ideias do filósofo chinês Confúcio).

2. A criação do projeto

Com a iniciativa de aprofundar alguns conceitos da matemática, um grupo de estudantes da Universidade Estadual de Londrina, graduandos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática, recorreram à professora Dra. Magna Natalia Marin Pires para a criação de um projeto de extensão na qual os estudantes pudessem colocar em prática suas ideias.

Em reunião com alguns desses estudantes a professora definiu que o projeto seria no formato de oficina, o grupo levou em consideração a potencialidade das oficinas no processo de aprendizagem. Em uma oficina de matemática, os estudantes são ativos, em conjunto com o professor eles constroem seu conhecimento de maneira lúdica, às vezes divertida e dinâmica; por meio de uma oficina é possível chamar a

atenção do estudante para o tema estudado, deixá-lo mais interessado e promover o trabalho em grupo entre os estudantes. Segundo Cuberes:

Oficina é um tempo e um espaço para aprendizagem; um processo ativo de transformação recíproca entre sujeito e objeto; um caminho com alternativas, com equilibrações que nos aproximam progressivamente do objeto a conhecer (Cuberes 1989, apud Vieira, Volquind, 1996 p. 11).

O objetivo do desenvolvimento dessas oficinas é a compreensão de conteúdos que não foram bem aprendidos no Ensino Médio, devido ao curto período das aulas, falta de preparo por parte do professor, falta de colaboração da turma, entre outros fatores. Muitos assuntos são apenas decorados para provas, vistos de maneira superficial, e que, quando questionado algo mais específico sobre o mesmo, os estudantes não sabem responder. Os conteúdos escolhidos para dar início às oficinas foram razões métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas e trigonometria na circunferência, neste trabalho serão abordados o segundo e o terceiro conteúdo elencados.

De acordo com Nascimento, o ensino da trigonometria,

desde a exploração inicial no triângulo retângulo, sempre esteve conectada com inúmeras aplicações concretas, e mesmo quando muito exploradas, dá-se ênfase a repetição das regras tornando o ensino mecanizado, sem compreensão. Quando explorado numa perspectiva histórica, a ênfase é dada às tábuas trigonométricas, devido o seu uso, e não como construção histórica do pensamento científico (Nascimento, 2013, p. 4).

Além disso, quando esse conteúdo é abordado na Educação Básica é comum os professores apresentarem aos alunos uma tabela (Tabela 1) com os valores do seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° , chamados de ângulos notáveis.

Tabela 1 – Razões Trigonométricas dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: adaptado de Garcia, Vier, 2022.

Os estudantes, após terem contato com a tabela são orientados a decorá-la na maior parte das vezes, seja por música ou repetição, todavia não é explicado aos alunos o motivo desses valores, o “por que?”, se algum dia eles esquecerem não saberão como encontrar os valores sem a ajuda da tabela. Conforme Nascimento:

A falta de significado do conteúdo para o nosso aluno, o que implica diretamente na aprendizagem. Na vida, o que desperta em nós interesse, na maioria das vezes, é aquilo que nos torna úteis, que tem significado para nós. Nestas condições fica mais prazeroso estudar, fica mais prazeroso aprender. No cotidiano escolar não é diferente. Como professores, corremos o risco de focarmos nos fins, sem levarmos em consideração os meios/o processo (Nascimento, 2013, p. 5).

A intenção da oficina era que todos formassem uma compreensão visual desses valores apoiados na construção de triângulos retângulos e na circunferência trigonométrica.

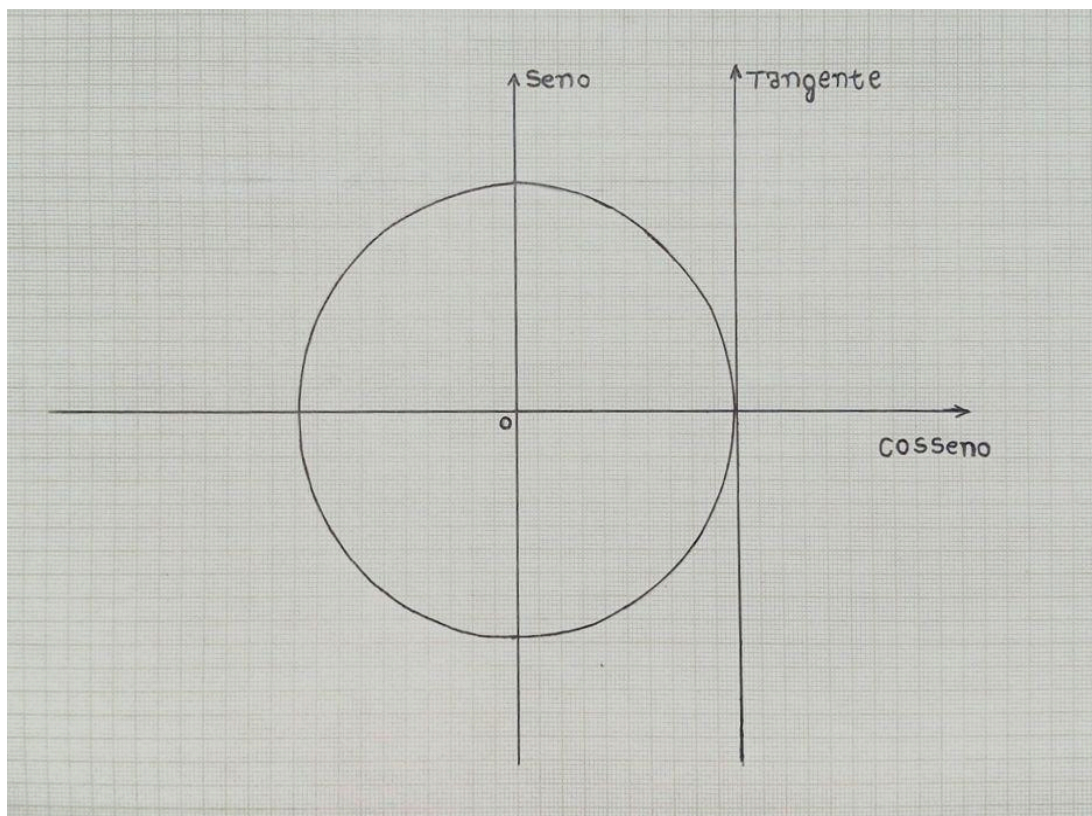
3. A oficina pelas mãos dos graduandos

Na primeira oficina realizada com os graduando, na qual as autoras deste artigo participaram, cada um desenhou em uma folha 3 triângulos retângulos com as medidas que desejaram para os seus lados, a única orientação era que dos 3 triângulos, o primeiro precisava ter um ângulo de 30° , o segundo um ângulo de 45° e o terceiro um ângulo de 60° . Em seguida eles mediram os lados desses triângulos e estimaram razões entre cateto oposto e hipotenusa, cateto adjacente e hipotenusa, e cateto oposto e cateto adjacente, puderam observar que apesar dos triângulos terem medidas diferentes para os lados, todos possuíam o mesmo valor para as razões experimentadas. Foi definido então razão seno, cosseno e tangente. Essa primeira parte foi essencial para a identificação de que os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis ocorrem em qualquer triângulo retângulo.

Nas oficinas que se seguiram os estudantes realizaram construções geométricas para localizar os eixos do seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica (Figura 1); com lápis, borracha, régua, compasso e uma folha de papel milimetrado, construíram uma circunferência de raio 10, em seguida localizaram o eixo

de cada razão trigonométrica. Na sequência, servindo-se de um transferidor eles marcaram na circunferência os arcos correspondentes aos ângulos de 30° , 45° e 60° .

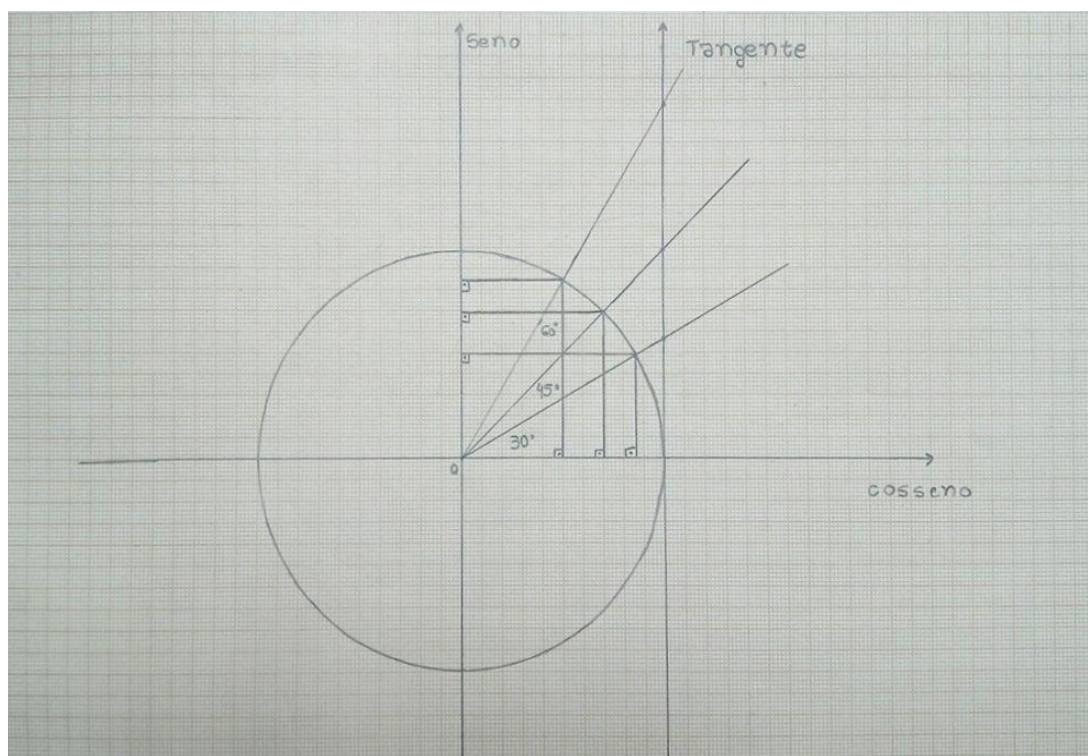
Figura 1 - Círculo trigonométrico realizado pela autora Laís



Fonte: o próprio autor

Com o auxílio da professora, co-autora desse artigo, eles aprenderam que para conhecer a medida do seno de um ângulo basta traçar um segmento perpendicular ao eixo do seno partindo do final do arco que subentende esse ângulo, o valor do seno será a medida da distância da origem da circunferência ao ponto da projeção perpendicular traçada. A mesma regra ocorre para o cosseno, mas nesse caso o segmento traçado é perpendicular ao eixo das abscissas (do cosseno). Por fim, o valor da tangente de um ângulo é encontrado prolongando o segmento do final do arco e a origem da circunferência, até encontrar o eixo da tangente (Figura 2).

Figura 2 - Círculo trigonométrico com a representação dos ângulos notáveis realizado pela autora Laís

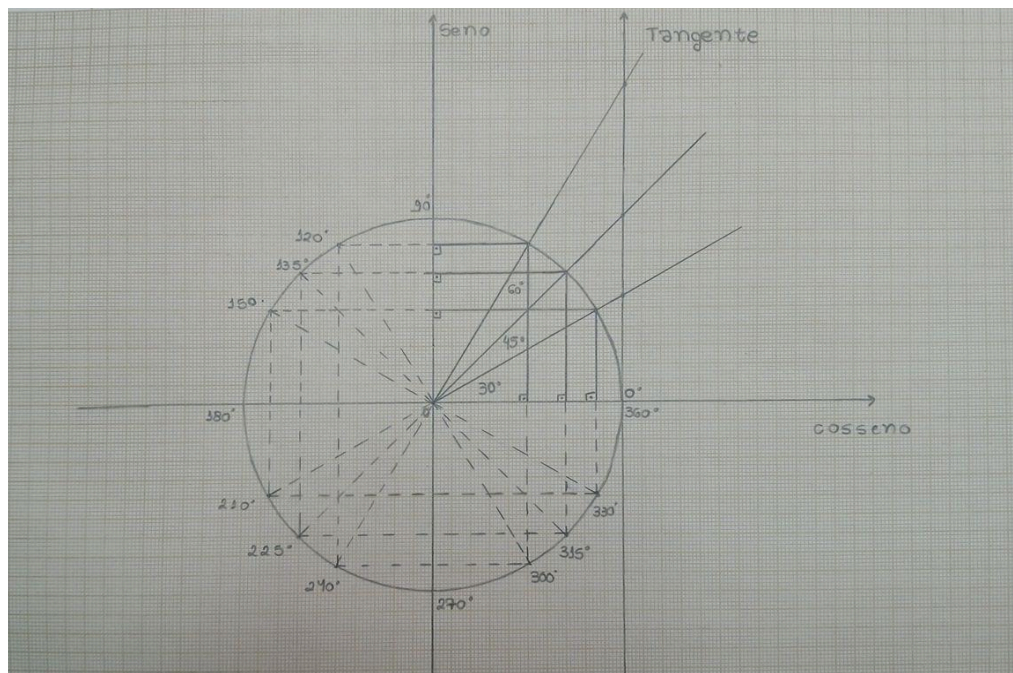


Fonte: o próprio autor

Fazendo as medições das distâncias encontradas, o grupo de estudantes observou e comprovou a ocorrência dos valores dados pela tabela em relação aos ângulos notáveis. Na sequência, o mesmo foi feito para a cossecante, secante e cotangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° .

Em seguida os estudantes fizeram as construções para saberem os valores para arcos do segundo, terceiro e quarto quadrantes (Figura 3).

Figura 3 - Círculo Trigonométrico realizado pela autora Laís



Fonte: o próprio autor

Para finalizar, preencheram uma tabela com os valores dos ângulos notáveis e seus ângulos correspondentes nos demais quadrantes, segue abaixo a tabela preenchida:

Figura 3 – Valores dos ângulos notáveis e seus ângulos correspondentes realizado pela autora Beatriz

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\cancel{A}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\cancel{A}$	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg	$\cancel{A}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\cancel{A}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	$\cancel{A}$
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\cancel{A}$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	2	$\cancel{A}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
cossec	$\cancel{A}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\cancel{A}$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\cancel{A}$

Fonte: o próprio autor

Os graduandos também estudaram os sinais e a variação de cada função trigonométrica no 1° , 2° , 3° e 4° quadrante, por exemplo: no 2° quadrante os valores de seno são positivos e a variação é decrescente, já no 3° quadrante os valores são negativos e a variação também é decrescente.

4. As oficinas para a Educação Básica

Após cerca de 5 meses o grupo de estudantes da graduação conseguiu finalizar os estudos sobre relações trigonométricas, as oficinas ocorriam aos sábados, quinzenalmente. No mês de novembro o grupo foi convidado para oferecer parte do que estudaram para alunos do PIC - OBMEP, no Encontro Regional da OBMEP na UEL, devido ao tempo, abordamos somente relações métricas no triângulo retângulo. Realizamos o mesmo trabalho no colégio Marquês de Caravelas em Arapongas, destinado aos alunos do 1° ano do Ensino Médio. Para essas oficinas, em um grande grupo montamos Planos de Aula, essa ação foi uma excelente experiência para as autoras do artigo.

A experiência em Arapongas foi realizada em dois encontros, iniciando às 8h da manhã e finalizando às 11h, somente uma parte do grupo de estudantes teve disponibilidade para se deslocar e oferecer a oficina, contudo os acontecimentos em sala foram discutidos com todo grupo.

Ao chegar no colégio os graduandos foram bem recebidos por professores e coordenadores e também pelos estudantes da escola, que se encontravam curiosos em relação ao que seria executado. Os passos seguidos durante a aplicação, que constavam no plano de aula, foram os mesmos realizados pelos alunos da UEL quando esses fizeram a oficina.

Os estudantes prestaram muita atenção e foram muito participativos. Inicialmente eles tiveram bastante dificuldade, foi necessário esclarecer conceitos básicos como, razão, tipos de triângulos, para depois seguir com a oficina. Devido a esse fator a primeira parte levou um tempo considerável: os estudantes do 1° ano construíram três triângulos, um com um ângulo de 30° , outro com um ângulo de 45° e

outro com um ângulo de 60° , não importando a medida escolhida para os lados desses triângulos e depois calcularam as razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

Após calcularem as medidas eles foram questionados sobre o que ocorria, qual a relação dos valores encontrados a partir do triângulo de cada um, era objetivo dos aplicadores da oficina que os alunos pensassem por conta própria e pudessem fazer algumas descobertas sozinhos. Passados alguns minutos após serem questionados, todos concordaram que os valores encontrados eram iguais ou muito próximos e puderam concluir a validade desses valores para qualquer triângulo retângulo.

Em decorrência do tempo gasto na primeira parte, a etapa da construção da circunferência trigonométrica, somente foi esboçada e comentada no quadro, sem que os estudantes fizessem as construções, seria necessário de mais dois encontros para essas construções.

5. Conclusões

Após uma breve conversa sobre a experiência com os graduandos, a resposta foi unânime, todos comentaram que na Educação Básica nunca tinham visto de onde os valores dos ângulos notáveis surgiram e então só “aceitaram”, com a participação na oficina tudo fez mais sentido, além de ajudar a compreender outros conteúdos das matérias da graduação relacionados a isso, como por exemplo, coordenadas polares. A oficina contribuiu para que eles possam lembrar os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis sem decorar a tabela ou cantar uma música, o que é comum entre os estudantes.

Os alunos do colégio de Arapongas também afirmaram a eficácia da oficina para o entendimento sobre razões trigonométricas. Para eles foi algo diferente do que estavam acostumados, segue o *feedback* de um dos alunos que participou da oficina: “Gostei bastante, não fiquei entediado durante as tarefas, vocês conseguiram prender minha atenção, foi muito legal.” Em contato com a escola foi confirmado o interesse dos alunos por mais oficinas, sobre outros temas, aplicadas pelos graduandos.

Também foi possível observar que quanto mais as oficinas foram aplicadas mais os graduandos melhoraram a forma de aplicá-la. Fazendo mudanças na maneira de

dar aula, não observando somente o ano que os alunos estão, mas também o comportamento deles, o quanto eles produzem, nível de atenção e a melhor forma de compreenderem o que eles, enquanto professores, precisam saber a respeito do conteúdo e da forma de conduzir a aula, não valorizar apenas o resultado de uma tarefa matemática, mas o que essa tarefa permite explorar. O grupo já tem definido o próximo tema que será estudado na oficina e tem a ideia de aplicá-la também com alunos da Educação Básica.

6. Referências

CARDOSO R. C.; CARVALHO Costa M. H. C.; CARNEIRO de Brito T. C.; SANTOS R. M. S.; SANTOS J. O. **As oficinas educativas enquanto metodologia educacional**. IV Congresso Nacional de Educação – CONEDU. João Pessoa – Paraíba, 2017.

NASCIMENTO M. A. **Ensino-aprendizagem de trigonometria: explorando e resolvendo problemas**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba – Paraná, 2013.

VIEIRA E.; VOLQUIND L. **Oficinas de ensino: o quê, por quê? Como?** 1º ed. Porto Alegre: Edipucrs, 1996. (Série educação, 3).

GARCIA V. S. S.; Vier D. A. **Trigonometria** - Material. Instituto Federal de Santa Catarina - Câmpus Tubarão, atividade de Extensão IV. Tubarão – Santa Catarina, 2022.